Bijlage 8B

De evenwichtsvoorwaarde voor de keuze van de productiefactoren

In deze bijlage leiden we de evenwichtsvoorwaarde (8.28) af waarnaar verwezen wordt op p. 247 van het handboek.

De onderneming wil een hoeveelheid arbeid en kapitaal kiezen om een productieniveau te bereiken aan de laagst mogelijke kost. Het kostenminimaliseringsprobleem kan wiskundig voorgesteld worden als:

$$\begin{aligned} &Min_{L,K} \quad w \cdot L + r \cdot K \\ &onder\ de\ nevenvoorwaarde\ \ q = f(L,K) \end{aligned} \tag{8B.1}$$

waarbij L en K de beslissingsvariabelen zijn. In bijlage 6A gaven we al aan dat er verschillende methoden zijn om dit probleem op te lossen.

Een eerste, directe methode inverteert eerst de productiefunctie naar een van de beslissingsvariabelen, bijvoorbeeld de hoeveelheid arbeid, *L*. We krijgen dan een impliciete functie $L(K;q)$. Deze kunnen we substitueren in de totale kosten, die we dan minimaliseren naar de andere beslissingsvariabele *K*. We gebruikten deze methode om de optimale consumptiebundel van de consument af te leiden in hoofdstuk 6.

Een alternatieve oplossingsmethode is de Lagrangetechniek. Hier volgen we deze techniek. In de eerste stap stellen we op basis van het bovenstaande minimaliseringsprobleem de *Lagrangiaan* op:

$$\zeta = w \cdot L + r \cdot K + \lambda\big(q - f(L,K)\big) \tag{8B.2}$$

De variabele λ wordt de Lagrange-multiplicator genoemd.

In een tweede stap berekenen we dan de voorwaarden van eerste orde met betrekking tot de beslissingsvariabelen *L* en *K*, en de Lagrange-multiplicator λ. De voorwaarden zijn:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial L} = w - \lambda \frac{\partial f(L,K)}{\partial L} = 0 \tag{8B.3}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial K} = r - \lambda \frac{\partial f(L,K)}{\partial K} = 0 \tag{8B.4}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} = q - f(L,K) = 0. \tag{8B.5}$$

Vergelijking (8B.5) is gewoon de productiefunctie. De eerste twee vergelijkingen bevatten de termen $\frac{\partial f(L,K)}{\partial L}$ en $\frac{\partial f(L,K)}{\partial K}$, die niets anders zijn dan de marginale productiviteit van arbeid en kapitaal, of respectievelijk MP_L en MP_K. We substitueren die in vergelijkingen (8B.3) en (8B.4), en krijgen dan

$$w = \lambda \cdot MP_L(L,K). \tag{8B.6}$$

$$r = \lambda \cdot MP_K(L,K). \tag{8B.7}$$

Wanneer we beide vergelijkingen door elkaar delen, valt de Lagrange-multiplicator λ weg en krijgen we, indien we gebruik maken van vergelijking (8A.3), de gezochte evenwichtsvoorwaarde (8.28), zijnde

$$MTSV(L,K) = -\frac{MP_L(L,K)}{MP_K(L,K)} = -\frac{w}{r}. \tag{8B.8}$$

We kunnen de voorwaarde (8B.9) voor kostenminimalisering ook schrijven als:

$$\frac{MP_L(L,K)}{MP_K(L,K)} = \frac{w}{r}. \tag{8B.9}$$

Deze voorwaarde zegt dat een onderneming haar inputs zodanig kiest dat, voor de laatst aangekochte eenheden, de relatieve marginale producten van de productiefactoren precies gelijk is aan de relatieve prijzen van die productiefactoren. Indien het marginale product van arbeid ten opzichte van kapitaal hoger zou zijn dan de relatieve prijs van arbeid ten opzichte van kapitaal, dan zou het beter zijn het kapitaal te verminderen en te vervangen door arbeiders.

Om de intuïtie achter voorwaarde (8B.9) te verduidelijken, kunnen we ze ook schrijven als:

$$\frac{MP_L(L,K)}{w} = \frac{MP_K(L,K)}{r}. \tag{8B.10}$$

Stel dat de onderneming één extra euro besteedt aan het inhuren van arbeiders, dan stijgt de ingezette hoeveelheid arbeid met $\frac{€1}{w}$ eenheden. De extra output die hiermee gepaard gaat is bij benadering gelijk aan $MP_L(L,K) \cdot \frac{1}{w} = \frac{MP_L(L,K)}{w}$. Op dezelfde manier kunnen we afleiden dat de extra output bij het gebruik van die euro om extra kapitaal in te zetten gelijk is aan $\frac{MP_K(L,K)}{r}$. Voorwaarde (8B.10) drukt dus uit dat de kostenminimaliserende onderneming haar inputs zodanig kiest dat de laatste euro besteed aan arbeid evenveel opbrengt als de laatste euro besteed aan kapitaal. Indien dat niet het geval zou zijn, kan de onderneming haar kosten namelijk verlagen. Stel bijvoorbeeld dat de volgende ongelijkheid geldt bij de huidige inputcombinatie:

$$\frac{MP_L(L,K)}{w} > \frac{MP_K(L,K)}{r}. \tag{8B.11}$$

In dat geval kan de onderneming haar kosten verlagen door iets meer arbeid en iets minder kapitaal te gebruiken. Ze zal haar inputcombinatie herschikken tot de ongelijkheid in (8B.11) veranderd is in de gelijkheid van (8B.10).