Bijlage 6A

Wiskundige bijlage

In deze bijlage leiden we de evenwichtsvoorwaarde van de consument af op een algemene wiskundige manier. Daartoe vertalen we de voorkeurordening eerst naar een wiskundige weergave, de nutsfunctie. Daarna karakteriseren we de keuze van de consument als die bundel waar de absolute waarde van de marginale substitutievoet gelijk is aan de prijsverhouding en geven we een voorbeeld van hoe de optimale goederenbundel kan worden berekend.

1 Weergave van de voorkeurordening door een nutsfunctie

De voorkeurordening is een relatie tussen bundels die we hierboven hebben weergegeven met de verbale uitdrukkingen 'is beter dan', 'is slechter dan' of 'is even goed als'. Economen hebben aangetoond dat die ordening, indien ze aan bepaalde voorwaarden voldoet, kan weergegeven worden door een wiskundige functie. Deze zogenaamde nutsfunctie, hier voorgesteld door U, kent aan elke bundel een waarde of nutsgetal toe zodat

$$U(A) > U(B) \Leftrightarrow \text{bundel } A \text{ is beter dan bundel } B, \tag{6A.1}$$

$$U(A) = U(B) \Leftrightarrow \text{bundel } A \text{ is even goed als bundel } B, \tag{6A.2}$$

$$U(A) < U(B) \Leftrightarrow \text{bundel } A \text{ is slechter dan bundel } B. \tag{6A.3}$$

De nutsfunctie wordt dus gebruikt om de bovenvermelde verbale relaties te vervangen door algebraïsche relaties 'groter dan', 'kleiner dan' of 'gelijk aan'.

In de vierde kolom van onderstaande tabel nemen we de functie $U(q_1, q_2) = q_1 q_2$ als voorbeeld, en berekenen we de nutsgetallen voor een aantal bundels met variërende hoeveelheden q_1 en q_2. Zo bekomen we de voorkeurordening over de betreffende bundels. We zien dat *B* beter is dan *A*, dat *B* en *C* even goed zijn, dat *D* en *E* even goed zijn en dat *F* beter is dan *B*, maar slechter dan *D*. Hieruit leiden we af dat *B* en *C* op dezelfde indifferentiecurve liggen. Dat geldt ook voor *D* en *E*. Bundel *F* bevindt zich dan weer op een curve tussen die van *B* en *D*. Algemener stelt de nutsfunctie ons in staat de indifferentiekaart uit te tekenen. Uit (6A.2) volgt immers dat twee goederenbundels enkel op dezelfde indifferentiecurve liggen als ze dezelfde functiewaarde genereren. Een indifferentiecurve in het geval van twee goederen kunnen we dus algebraïsch voorstellen door de goederenbundels die voldoen aan:

$$U(q_1, q_2) = \textit{constante}. \tag{6A.4}$$

Als oefening kan de lezer een bepaalde waarde voor de constante nemen, en dan voor elke hoeveelheid q_1 de hoeveelheid q_2 berekenen die dit nutsgetal oplevert. De vergelijking $q_2 = 25/q_1$ bijvoorbeeld, geeft alle bundels weer die op de indifferentiecurve met nutsgetal 25 liggen.

Tabel: nutsfuncties

bundel	q_1	q_2	$U(q_1,q_2)=q_1q_2$	$V(q_1,q_2)=\sqrt{q_1q_2}$
A	1	1	1	1
B	2	2	4	2
C	4	1	4	2
D	5	5	25	5
E	25	1	25	5
F	3	3	9	3

Een fundamenteel kenmerk van de nutsfunctie is dat ze niet uniek is. We illustreren dit aan de hand van nutsfunctie V in de vijfde kolom van bovenstaande tabel: $V(q_1,q_2)=\sqrt{q_1q_2}$. Die leidt ons tot exact dezelfde voorkeuren als nutsfunctie U. Dezelfde voorkeurordening kan dus weergegeven worden door meerdere functies. We kunnen dus een functie kiezen die handig is om mee te werken, en in ons voorbeeld is U zeker gemakkelijker hanteerbaar dan V. Het enige wat gerespecteerd moet worden, is de ordening zelf. Dat illustreert bovendien dat het gebruikte nutsgetal geen inhoudelijke betekenis heeft. Het is een etiket dat op een indifferentiecurve geplakt wordt. Bij gebruik van U plakken we bijvoorbeeld het etiket 25 op een curve, bij gebruik van V wordt diezelfde curve aangeduid met het etiket 5. Aan de indifferentiekaart zelf is echter niets veranderd. Economen zeggen daarom dat de indifferentiekaart een ordinaal concept is. Ze vat de ordening van de goederenbundels samen.

1.1 Marginaal nut

Indien de hoeveelheid van één goed wordt uitgebreid bij constante hoeveelheden van de andere goederen, wordt de toename in de waarde van de nutsfunctie benoemd als marginaal nut. Algebraïsch is het de (partiële) afgeleide van de nutsfunctie naar het goed in kwestie. Het marginale nut van goed 1 is gelijk aan:

$$MU_1(q_1,q_2)=\lim_{\Delta q_1\to 0}\frac{U(q_1+\Delta q_1,q_2)-U(q_1,q_2)}{\Delta q_1}. \tag{6A.5}$$

Het marginale nut hangt af van de gekozen nutsfunctie: afhankelijk of we de functie U of V gebruiken in vergelijking (6A.5), krijgen we een ander resultaat. We zeggen daarom dat het marginale nut een cardinaal, geen ordinaal concept is. De veronderstelling van niet-verzadiging komt tot uiting in een marginaal nut dat positief is. Verzadiging doet zich voor wanneer het marginale nut nul wordt. Een negatief marginaal nut wijst erop dat het goed ongewenst is.

1.2 Marginale substitutievoet

Bij de berekening van het marginale nut variëren we de hoeveelheid van één goed en houden we alle andere hoeveelheden constant. Algebraïsch komt dit tot uiting in het gebruik van een partiële afgeleide. De marginale substitutievoet varieert de hoeveelheid van twee goederen, en wel op zo'n manier dat het totale nut niet verandert; we blijven dus op dezelfde indifferentiekromme.

Om het totale effect van de verandering in de twee hoeveelheden op het nut te registreren, gebruiken we een totale differentiaal. Bij een nutsfunctie met twee goederen wordt dit:

$$dU = MU_1(q_1, q_2)dq_1 + MU_2(q_1, q_2)dq_2. \tag{6A.6}$$

Het rechterlid is de som van twee termen. De eerste term $MU_1(q_1, q_2)dq_1$ bijvoorbeeld meet het effect van een marginale wijziging in goed 1 (dq_1) op het totale nut door deze wijziging te vermenigvuldigen met het marginale nut van goed 1 ($MU_1(q_1, q_2)$).

De marginale substitutievoet is de verhouding van de verandering in beide goederen zodanig dat we op dezelfde indifferentiecurve blijven. Algebraïsch komt dit erop neer dU uit vergelijking (6A.6) gelijk te stellen aan 0. We krijgen dus:

$$dU = MU_1(q_1, q_2)dq_1 + MU_2(q_1, q_2)dq_2 = 0. \tag{6A.7}$$

Door herschikking van (6A.7) vinden we de marginale substitutievoet voor een gegeven goederenbundel:

$$MSV(q_1, q_2) = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{MU_1(q_1, q_2)}{MU_2(q_1, q_2)}. \tag{6A.8}$$

Indien beide goederen gewenst zijn, zijn beide marginale nuttigheden positief en is de marginale substitutievoet, en dus de helling van de raaklijn langs de indifferentiekromme, negatief. Het is gemakkelijk aan te tonen dat de marginale substitutievoet niet afhangt van de gekozen nutsfunctie. Concreet betekent dit dat de *MSV* die berekend wordt voor de nutsfunctie U uit de tabel hierboven, identiek is aan de *MSV* op basis van de functie V. Hoewel de functies die het marginaal nut voor goed 1 en voor goed 2 weergeven verschillend zijn voor functies U en V, is de verhouding van de marginale nuttigheden dus wel dezelfde voor beide functies. We zeggen daarom dat de *MSV* een ordinaal concept is.

2 De evenwichtsvoorwaarde

De optimale goederenbundel in ons voorbeeld met twee goederen is het resultaat van het volgende maximeringsprobleem:

$$\begin{aligned} &\max_{q_1, q_2} U(q_1, q_2) \\ &\text{onder de nevenvoorwaarde } p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 \le y. \end{aligned} \tag{6A.9}$$

Dit is de schrijfwijze van een wiskundig probleem, waarbij waarden bepaald dienen te worden voor de variabelen q_1 en q_2 zodat de objectieffunctie U gemaximeerd wordt, rekening houdende met de nevenvoorwaarde dat de budgetbeperking dient gerespecteerd te worden. Noteer dat de objectieffunctie in dit geval de hierboven voorgestelde nutsfunctie is.

Probleem (6A.9) wordt meestal opgelost aan de hand van de Lagrange-techniek en in de wiskundige appendix van hoofdstuk 8 gaan we die techniek illustreren om de inputkeuze van de onderneming af te leiden. Hier beperken we ons tot een meer eenvoudige oplossingsmethode. Die bestaat erin de budgetbeperking te substitueren in de objectieffunctie. Bovendien beperken we ons opnieuw tot het voorbeeld met twee goederen. De veronderstelling van niet-verzadiging impliceert dat de budgetbeperking bindend wordt, wat in het geval van twee goederen het volgende betekent:

$$q_2 = \frac{y}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_1. \tag{6A.10}$$

Hoeveelheid q_2 is dus, via de budgetrechte, een functie van hoeveelheid q_1, hetgeen we noteren als $q_2(q_1)$. Het oorspronkelijke maximeringsprobleem kunnen we nu herschrijven als:

$$Max_{q_1} U\left(q_1, q_2\left(q_1\right)\right) \tag{6A.11}$$

In (6A.11) hebben we nu een objectieffunctie die gemaximeerd wordt met betrekking tot één variabele, q_1. De oplossing voor die onbekende halen we uit de eerste orde voorwaarde:

$$\begin{aligned} &\frac{dU(q_1, q_2(q_1))}{dq_1} = 0 \\ &\Leftrightarrow MU_1\left(q_1, q_2(q_1)\right) + MU_2\left(q_1, q_2(q_1)\right)\frac{dq_2(q_1)}{dq_1} = 0. \end{aligned} \tag{6A.12}$$

Hierbij hebben we de kettingregel toegepast. Uit de budgetvergelijking (6A.10) volgt dat:

$$\frac{dq_2(q_1)}{dq_1} = -\frac{p_1}{p_2}. \tag{6A.13}$$

Dat is natuurlijk niets anders dan de helling van de budgetrechte. We vervangen nu (6A.13) in (6A.12) en concluderen dat de goederenbundel waarbij het nut gemaximeerd wordt, gekarakteriseerd wordt door de volgende voorwaarde:

$$\frac{MU_1(q_1, q_2(q_1))}{MU_2(q_1, q_2(q_1))} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{6A.14}$$

Gebruik makend van (6A.8) kan deze voorwaarde ook herschreven worden als:

$$\left|MSV(q_1, q_2(q_1))\right| = \frac{p_1}{p_2}. \tag{6A.15}$$

3 Berekening van de optimale goederenbundel: een voorbeeld

Stel dat de voorkeurordening voorgesteld wordt door de volgende nutsfunctie:

$$U(q_1, q_2) = 0.7\ln q_1 + 0.3\ln q_2. \tag{6A.16}$$

Deze nutsfunctie is een voorbeeld van een Cobb-Douglas-nutsfunctie. De parameters 0.7 en 0.3 zijn hier willekeurig gekozen. In werkelijkheid kunnen ze echter geschat worden aan de hand van geobserveerd keuzegedrag van consumenten via econometrische technieken. De optimale goederenbundel (q_1^*, q_2^*) moet voldoen aan twee voorwaarden. De helling van de raaklijn aan de indifferentiecurve door (q_1^*, q_2^*) moet gelijk zijn aan de helling van de budgetlijn:

$$\left|MSV(q_1^*, q_2^*)\right| = \frac{p_1}{p_2}. \tag{6A.17}$$

Verder moet de bundel (q_1^*, q_2^*) op de budgetrechte liggen:

$$p_1 q_1^* + p_2 q_2^* = y. \tag{6A.18}$$

Vergelijkingen (6A.17) en (6A.18) vormen een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Voor de nutsfunctie in (6A.16) vinden we, gebruik makend van (6A.8):

$$\left|MSV(q_1, q_2)\right| = \frac{0.7q_2}{0.3q_1}. \tag{6A.19}$$

Zo wordt vergelijking (6A.17):

$$\left|MSV(q_1^*, q_2^*)\right| = \frac{0.7q_2^*}{0.3q_1^*} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{6A.20}$$

Samen met de budgetrechte in (6A.18) wordt het stelsel van twee vergelijkingen met de onbekenden q_1^* en q_2^* dan:

$$\frac{0.7q_2^*}{0.3q_1^*} = \frac{p_1}{p_2} \tag{6A.21}$$

$$p_1 q_1^* + p_2 q_2^* = y. \tag{6A.22}$$

De oplossing van dit stelsel wordt gevormd door de vraagfuncties naar goederen 1 en 2:

$$q_1^* = \frac{0.7y}{p_1}, \tag{6A.23}$$

$$q_2^* = \frac{0.3y}{p_2}. \tag{6A.24}$$

Deze vraagfuncties drukken de vraag naar de goederen uit als een functie van het budget y en de prijzen p_1 en p_2. Voor willekeurige waarden van het budget en de prijzen kunnen we de gevraagde hoeveelheden berekenen. Laten we dat doen voor de volgende waarden: $p_1 = 15$, $p_2 = 45$ en $y = 150$. De gevraagde hoeveelheden van goed 1 en goed 2 worden respectievelijk:

$$q_1^* = 7. \tag{6A.25}$$

$$q_2^* = 1. \tag{6A.26}$$

Voor andere waarden van de prijzen of het budget worden vanzelfsprekend andere gevraagde hoeveelheden bekomen.

Het is eenvoudig na te gaan met deze hoeveelheden dat de *MSV* gelijk is aan $-1/3$ en dus, op het teken na, gelijk is aan de prijsverhouding. Bovendien benut deze bundel ook het volledige budget. De bundel (7,1) ligt op de indifferentiecurve met nutsgetal 1,362 $(= (0.7)\ln 7 + (0.3)\ln 1)$. Dat deze bundel voldoet aan de eerste orde voorwaarde en dat hij op de budgetrechte ligt impliceert dat we in de budgetverzameling geen enkele andere bundel kunnen vinden die voor de nutsfunctie (6A.16) tot een hoger nutsgetal leidt.