

# Bijlage 4A

## Wiskundige bijlage

In deze bijlage tonen we aan dat

- de prijselasticiteit van de vraag gelijk is aan  $-1$  halfweg een lineaire vraagcurve;
- er een verband is tussen de prijselasticiteit van de vraag naar een goed en de ontvangsten voor de verkopers van dit goed;
- er een verband is tussen de inkomenselasticiteit van de vraag naar een goed en de evolutie van het budgetaandeel voor dit goed als het inkomen verandert.

### 1 De eenheidselasticiteit op een lineaire vraagcurve

Neem de lineaire vraagcurve uit figuur 3.8, beschreven door volgende vergelijking:

$$V(p) = a - b \cdot p. \quad (4A.1)$$

De intercepten op de  $q$ - en  $p$ -as zijn respectievelijk  $a$  en  $\frac{a}{b}$  en de richtingscoëfficiënt  $\frac{dV(p)}{dp}$  is gelijk aan  $-b$ .

Om de coördinaten te vinden van het punt waar de elasticiteit gelijk is aan  $-1$ , gebruiken we uitdrukking (4.3):

$$\begin{aligned} \varepsilon_p^v = -1 &\Leftrightarrow \frac{dV(p)}{dp} \cdot \frac{p}{V(p)} = -1 \\ &\Leftrightarrow -b \cdot \frac{p}{V(p)} = -1 \\ &\Leftrightarrow V(p) = b \cdot p. \end{aligned} \quad (4A.2)$$

Vergelijkingen (4A.1) en (4A.2) vormen een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden waarvan de oplossing is:  $V(p) = \frac{a}{2}$  en  $p = \frac{a}{2b}$ . De eenheidselasticiteit wordt dus gevonden bij een prijs en een hoeveelheid die net de helft bedragen van de snijpunten van de vraagcurve met respectievelijk de horizontale en de verticale as, of in het punt juist halfweg de vraagrechte.

## 2 De relatie tussen de prijselasticiteit van de vraag en de opbrengsten voor de verkopers

De uitgaven aan het goed door de kopers zijn ook de ontvangsten voor de verkopers. Deze totale ontvangsten, die we hieronder weergeven door  $TO$  zijn het product van prijs en hoeveelheid en hangen derhalve op een dubbele manier af van de prijs:

$$TO(p) = p \cdot q = p \cdot V(p), \quad (4A.3)$$

waarbij  $V(p)$  de vraagfunctie voorstelt die de gevraagde hoeveelheid relateert aan de prijs.

Om het effect van een prijsverandering op de ontvangsten te kennen, nemen we de afgeleide van  $TO(p)$  naar  $p$  en passen daarbij de productregel voor afgeleiden toe:

$$\begin{aligned} \frac{dTO(p)}{dp} &= 1 \cdot V(p) + p \cdot \frac{dV(p)}{dp} \\ &= V(p) \cdot \left[ 1 + \frac{p}{V(p)} \cdot \frac{dV(p)}{dp} \right] \\ &= V(p) \cdot [1 + \varepsilon_p^V] \\ &= V(p) \cdot [1 - |\varepsilon_p^V|], \end{aligned} \quad (4A.4)$$

waarbij we in de laatste lijn voor het gemak van interpretatie de prijselasticiteit, die in normale gevallen negatief is, vervangen hebben door haar absolute waarde. Daar  $V(p)$  steeds positief is, wordt het teken van  $\frac{dTO(p)}{dp}$  bepaald door het teken van  $[1 - |\varepsilon_p^V|]$ .

We kunnen dus concluderen dat bij een inelastische vraag ( $|\varepsilon_p^V| < 1$ ) het teken van de afgeleide van de totale ontvangsten naar de prijs positief is. Dat betekent dat bij een inelastische vraag, prijs en ontvangsten in dezelfde richting bewegen. Bij een elastische vraag ( $|\varepsilon_p^V| > 1$ ) wordt het teken van de afgeleide van de totale ontvangsten naar de prijs negatief, en bewegen prijs en ontvangsten in tegengestelde zin. Als  $|\varepsilon_p^V| = 1$  is de afgeleide gelijk aan nul, en – als ook de tweede orde voorwaarde, die we hier niet behandelen, voldaan is – bereiken de ontvangsten een maximum.

Vergelijking (4A.2) kan ook uitgedrukt worden als een functie van de hoeveelheid:

$$TO(q) = p \cdot q = p(q) \cdot q, \quad (4A.5)$$

waarbij  $p(q)$  nu de inverse vraagfunctie voorstelt. Dit laat ons toe na te gaan hoe de ontvangsten van de verkopers evolueren als er meer van het goed verkocht wordt. We nemen daartoe de afgeleide van  $TO(q)$  naar de hoeveelheid  $q$ , en bekomen op een analoge wijze als hierboven:<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Merk op dat we in deze afleiding gebruik maken van de volgende gelijkheid:

$$\frac{dp(q)}{dq} \frac{q}{p(q)} = \frac{1}{\varepsilon_p^V}.$$

$$\frac{dFO(q)}{dq} = p(q) \cdot \left[ 1 - \frac{1}{|\varepsilon_p^V|} \right]. \quad (4A.6)$$

Vergelijking (4A.6) is van groot belang aangezien ze weergeeft hoe de marginale opbrengsten (de afgeleide van de totale opbrengsten naar de hoeveelheid) verlopen in functie van de verkochte hoeveelheid. Ze komt uitgebreid terug in hoofdstukken 9, 10 en 11 waar we de outputbeslissing van de producenten onder de loep nemen. Maar we kunnen nu al besluiten dat bij een perfect elastische vraagcurve ( $|\varepsilon_p^V| \rightarrow \infty$ ), de marginale ontvangsten gelijk zijn aan de prijs; en dat de marginale ontvangsten verder beneden de prijs liggen naarmate de vraag minder elastisch is.

### 3 De relatie tussen de inkomenselasticiteit van de vraag en het budgetaandeel

In deze bijlage tonen we aan dat het verband tussen de evolutie van het budgetaandeel van een goed en inkomenswijzigingen afhangt van de inkomenselasticiteit van de vraag naar dat goed.

We vertrekken van de Engel-curve die we in de hoofdtekst (p. 121) voorstelden als  $q^V = V(y)$ . Daardoor wordt het budgetaandeel  $w$  een functie van het inkomen op de volgende manier:

$$w = \frac{p \cdot V(y)}{y}. \quad (4A.7)$$

We willen nagaan hoe het budgetaandeel  $w$  verandert, als het inkomen  $y$  verandert. Daartoe leiden we (4A.7) af naar  $y$ , en aangezien  $y$  in teller en noemer staat, gebruiken we daarvoor de regel van de afgeleide voor een quotiënt:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dy} &= \frac{d(p \cdot V(y) \cdot y^{-1})}{dy} \\ &= \frac{p}{y} \cdot \left[ \frac{dV(y)}{dy} - \frac{V(y)}{y} \right] \\ &= \frac{p}{y} \cdot \frac{V(y)}{y} \left[ \frac{dV(y)}{dy} \frac{y}{V(y)} - 1 \right] \\ &= \frac{w}{y} [\varepsilon_y^V - 1]. \end{aligned} \quad (4A.8)$$

We hebben een luxegoed als het aandeel stijgt met het inkomen, d.w.z., als uitdrukking (4A.8) groter is dan nul. In de laatste lijn van uitdrukking (4A.8) is wat voor de haakjes staat altijd positief. Het teken wordt dus bepaald door wat tussen de haakjes staat. Dit impliceert dat voor een luxegoed de inkomenselasticiteit groter moet zijn dan 1. Het budgetaandeel neemt af bij stijgend inkomen als  $\varepsilon_y^V < 1$ , dat wil zeggen, bij noodzakelijke goederen. En het budgetaandeel blijft constant als de inkomenselasticiteit gelijk is aan 1.