Bijlage 2A

Nash-evenwicht in gemengde strategieën

Er zijn spelen waarin er geen Nash-evenwicht bestaat, althans niet als een combinatie van zuivere strategieën. Een bekend voorbeeld is het ‘matching pennies’-spel. Het spel is verwant aan ‘blad-steen-schaar’ maar is eenvoudiger.

Twee spelers beschikken elk over een muntstuk en moeten tegelijk beslissen om ofwel kruis ofwel munt te tonen. Als beiden dezelfde zijde tonen, wint speler 1 en ontvangt hij €1 van speler 2. Als ze verschillende zijden tonen, wint speler 2 en ontvangt hij €1 van speler 1.

Tabel 2A.1 vat het spel (spelers, strategieën en payoffs) samen. De som van de resultaten van de twee spelers is altijd nul: wat de ene speler wint, verliest de andere. Het spel wordt daarom een nulsomspel (‘zero-sum game’) genoemd.

Tabel 2A.1: resultatenmatrix voor ‘matching pennies’

		Strategieën voor speler 2	
		t_1: kruis	t_2: munt
Strategieën voor speler 1	s_1: kruis	(1; -1)	(-1; 1)
	s_2: munt	(-1; 1)	(1; -1)

Bij ‘matching pennies’ is er geen Nash-evenwicht in zuivere strategieën. Beschouw om het even welke cel in de resultatenmatrix: de speler die moet betalen heeft er altijd belang bij om van strategie te veranderen.

Er bestaat echter wel een Nash-evenwicht in gemengde strategieën. Als speler 2 met 50% kans kruis kiest (en dus ook met 50% kans munt), dan zal, ongeacht de keuze van speler 1 voor kruis of munt, zijn verwachte payoff gelijk zijn aan nul. Hetzelfde geldt uiteraard voor speler 2: als speler 1 met 50% kans kruis kiest, is speler 2 onverschillig tegenover welke zijde hij zelf toont. Samengevat, als beide spelers met 50% kans kruis kiezen, heeft elk van hen er, individueel, geen belang bij om af te wijken van die strategie. Deze combinatie van gemengde strategieën, waarbij elke speler met 50% kans kruis kiest, is het enige Nash-evenwicht in dit spel.

‘Matching pennies’ illustreert opnieuw het belang van de spelregels en, meer bepaald, het verschil tussen simultane en sequentiële spelen. Stel dat in het sequentiële ‘matching pennies’ speler 1 eerst aan zet is. Dan kan speler 2 zijn keuze hieraan aanpassen en wint hij zo altijd (in tegenstelling tot ‘the battle of the sexes’, waar we zagen dat het een voordeel is om eerst aan zet te zijn). Merk ook op dat er in het sequentiële ‘matching pennies’ twee Nash-evenwichten in zuivere strategieën zijn: s_1 gevolgd door t_2, en s_2 gevolgd door t_1. In elk van deze Nash-evenwichten wint speler 2.

Het ‘matching pennies’-spel wekt misschien de indruk dat gemengde strategieën altijd neerkomen op gelijke kansen voor elke strategie, zoals de fiftyfiftykansen voor kruis en munt in het Nash-evenwicht bij 'matching pennies'. Die indruk is verkeerd. Een gemengde strategie kan om het even welke kansen inhouden.

Beschouw als voorbeeld de resultatenmatrix in tabel 2A.2. Dit is een variant van 'matching pennies' waarbij de payoffs verdubbeld worden als beide spelers kruis kiezen. Deze variant is nog steeds een nulsomspel waarbij er geen Nash-evenwicht is in zuivere strategieën. Er is opnieuw één Nash-evenwicht in gemengde strategieën, waarbij nu elke speler kruis kiest met 40% kans en munt met 60% kans.

Tabel 2A.2: resultatenmatrix voor variant van 'matching pennies'

		Strategieën voor speler 2	
		t_1: kruis	t_2: munt
Strategieën voor speler 1	s_1: kruis	(2; -2)	(-1; 1)
	s_2: munt	(-1; 1)	(1; -1)

Een kleine berekening toont dit aan. Veronderstel dat speler 1 kruis kiest met kans p (en, bijgevolg, munt met kans $1-p$) en speler 2 kruis kiest met kans q (en munt met kans $1-q$). Een Nash-evenwicht is dan een combinatie (p,q) waarbij geen enkele speler er voordeel bij heeft zijn gekozen kans (p voor speler 1, q voor speler 2) nog te wijzigen. Beschouw eerst de optimale keuze van speler 1, gegeven dat speler 2 kruis kiest met kans q. Als speler 1 kruis kiest, is zijn verwachte payoff gelijk aan

$$q \cdot 2 + (1-q) \cdot (-1) = 3q - 1 \tag{2A.1}$$

(namelijk de som van de kansen q en $1-q$, elk vermenigvuldigd met de overeenkomstige payoff voor speler 1). Als speler 1 munt kiest, is zijn verwachte payoff gelijk aan

$$q \cdot (-1) + (1-q) \cdot 1 = -2q + 1. \tag{2A.2}$$

Bijgevolg zal speler 1 met zekerheid kruis kiezen als $3q-1 > -2q+1$, met zekerheid munt kiezen als $3q-1 < -2q+1$, en onverschillig zijn tussen kruis en munt als en slechts als $3q-1 = -2q+1$. Na vereenvoudigen van deze ongelijkheden besluiten we dat speler 1 met zekerheid kruis kiest als $q > 0,4$; met zekerheid munt als $q < 0,4$; en onverschillig is tussen kruis en munt als $q = 0,4$. We weten intussen dat in een Nash-evenwicht in dit spel het niet mogelijk is dat speler 1 met zekerheid kruis kiest, en ook niet dat hij met zekerheid munt kiest. Daarom moet $q = 0,4$ in een Nash-evenwicht.

De redenering vanuit het standpunt van speler 2, gegeven dat speler 1 kruis kiest met kans p, is nu volledig analoog. Als speler 2 kruis kiest, is zijn verwachte payoff gelijk aan

$$p \cdot (-2) + (1-p) \cdot 1 = -3p + 1. \tag{2A.3}$$

Als hij daarentegen munt kiest, is zijn verwachte payoff

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1) = 2p - 1. \tag{2A.4}$$

Speler 2 kiest dus met zekerheid kruis als $-3p+1 > 2p-1$, met zekerheid munt als $-3p+1 < 2p-1$, en is onverschillig tussen kruis en munt als $-3p+1 = 2p-1$. Vereenvoudigen leidt tot het volgende besluit: speler 2 kiest met zekerheid kruis als $p < 0,4$; kiest met zekerheid munt als $p > 0,4$; en is onverschillig is tussen kruis en munt als $p = 0,4$. In een Nash-evenwicht kan speler 2 niet met zekerheid kruis kiezen of met zekerheid munt kiezen; daarom moet $p = 0,4$ in een Nash-evenwicht. Samen levert dit de noodzakelijke voorwaarde $(p,q) = (0,4;0,4)$ op voor een Nash-evenwicht. Deze voorwaarde is ook een voldoende voorwaarde voor een Nash-evenwicht: gegeven $q = 0,4$ heeft speler 1 geen incentief om af te wijken van zijn gemengde strategie $p = 0,4$; en gegeven $p = 0,4$, heeft speler 2 geen incentief om af te wijken van zijn gemengde strategie $q = 0,4$.

Merk verder nog op dat in het Nash-evenwicht de verwachte payoff van speler 1 gelijk is aan

$$3q - 1 = 3 \cdot 0,4 - 1 = 0,2 \tag{2A.5}$$

en, aangezien het een nulsomspel is, is de verwachte payoff van speler 2 gelijk aan -0,2. In tegenstelling met de oorspronkelijke versie van 'matching pennies' zijn de verwachte payoffs hier niet langer nul. We kunnen dit begrijpen als het gevolg van het verdubbelen van de payoffs als beide spelers kruis kiezen. Gelet op de resultatenmatrix is het niet verwonderlijk dat deze wijziging voordelig is voor speler 1.

Ten slotte merken we op dat in dit voorbeeld de gemengde strategieën in het Nash-evenwicht dezelfde kansen inhouden voor beide spelers (40% kans op kruis). Dit hoeft in het algemeen niet zo te zijn: de kansen waarmee bepaalde strategieën in gemengde Nash-evenwichten gekozen worden, kunnen sterk verschillen over de spelers heen. De cruciale eigenschap van deze kansen is dat ze de andere speler(s) onverschillig maken bij de keuze van hun strategieën.