Bijlage 20B

Groei

In deze bijlage leiden we eerst de 'momentane' of 'ogenblikkelijke' groeivoet af. Dat is de groeivoet die betrekking heeft op elke moment in de tijd. Daarna belichten we de gevolgen van het niet-lineaire karakter van groei, en ontbinden we de groei van een aggregaat in zijn samenstellende delen. Tenslotte geven we ook een eenvoudige vuistregel om de groei te linken aan de tijd nodig om een grootheid te verdubbelen.

1 Ogenblikkelijke groeivoet

De groeivoet die gebruikt wordt in een continue formulering wordt de ogenblikkelijke of momentane groeivoet (in het Engels: 'instantaneous growth rate') genoemd. Een 'moment' of 'ogenblik' is een periode die oneindig kort is. We kunnen daarom de ogenblikkelijke groeivoet op een heuristische manier afleiden uit de groeivoet over een eindige periode door die periode steeds korter te maken.

Stel dat een variabele over één periode (bijvoorbeeld een jaar) toeneemt van Q_0 tot Q_1. We drukken dat uit als:

$$Q_1 = (1+g)Q_0 . \tag{20B.1}$$

Laat ons nu de groei over die ene periode opsplitsen in twee deelperiodes die even lang zijn, en waar de groei over de deelperiode dan gelijk is aan $\frac{g}{2}$. Dan kunnen we (20B.1) herschrijven als:

$$Q_1 = \left(1+\frac{g}{2}\right)^2 Q_0 . \tag{20B.2}$$

En als we het jaar indelen in vier kwartalen krijgen we:

$$Q_1 = \left(1+\frac{g}{4}\right)^4 Q_0 , \tag{20B.3}$$

of in het algemeen:

$$Q_1 = \left(1+\frac{g}{n}\right)^n Q_0 , \tag{20B.4}$$

waarbij de ene periode in n deelperioden wordt opgesplitst. Als we n heel groot laten worden, wordt de eindwaarde Q_1 een limietgeval:

$$Q_1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{g}{n}\right)^n Q_0\,, \tag{20B.5}$$

wat we, als we $\frac{g}{n}$ voorstellen door $\frac{1}{x}$, ook kunnen schrijven als:

$$Q_1 = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^g Q_0\,, \tag{20B.6}$$

want $n = xg$.

Nu is

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{20B.7}$$

de definitie van het getal e in de wiskunde (met als waarde 2,718). Dat betekent dat we de groei van Q_0 tot Q_1 over één periode ook kunnen schrijven als:

$$Q_1 = e^g Q_0\,. \tag{20B.8}$$

Vergelijkingen (20B.2) tot (20B.4) suggereren de interpretatie van deze groeivoet g. We maken de periode waarover we de groeivoet berekenen steeds korter. Daardoor neemt het 'samengesteld' karakter van de groei – vergelijkbaar met het effect van samengestelde intrestvoetberekeningen – steeds toe. Als we n heel groot maken, is het alsof we op elk moment de nieuwe slotwaarde berekenen waarop we dan weer de groeivoet toepassen. Daarom wordt deze groeivoet in het Engels de 'instantaneous growth rate' genoemd. Hij geldt op elk moment in de tijd.

Vergelijking (20B.8) kan gemakkelijk uitgebreid worden tot meerdere periodes:

$$Q_t = e^{g\cdot t} Q_0\,, \tag{20B.9}$$

wat we, gezien het feit dat *t* hier een continue variabele geworden is, beter noteren als:

$$Q(t) = e^{g\cdot t} Q_0\,. \tag{20B.10}$$

Dit is vergelijking (20.18) uit de tekst.

2 De gemiddelde jaarlijkse groeivoet

De exponentiële functie in vergelijking (20B.10) laat zien dat groei een *niet-lineair* proces is. Dat heeft belangrijke implicaties voor bewerkingen met groeivoeten. We illustreren dit aan de hand van tabel 20.3 Als we som nemen van de jaarlijkse groeivoeten van het wereldbbp tussen 2007 en 2018 (kolom (3) van de tabel), dan bekomen we 28%. Dat zou verkeerdelijk kunnen suggereren dat het wereld-bbp over 15 jaar met 28% gegroeid is, terwijl we uit de indexcijferreeks weten dat het 31,6% was. De oorzaak van deze 'fout' ligt in het optellen van de groeivoeten. Dat tonen we aan door het bbp jaar na jaar te berekenen, vanuit de formule:

$$Q_t = Q_{t-1}(1+g_t), \tag{20B.11}$$

die zelf direct afgeleid is uit (20.17), en waarbij we de groeivoet zelf nu voor de bondigheid van de notatie in peruun uitdrukken. Vertrekkend van 2007 krijgen we dus voor de groeivoet in 2008:

$$Q_{2008} = Q_{2007}(1+g_{2008}) \tag{20B.12}$$

En voor 2009 wordt dit:

$$Q_{2009} = Q_{2008}(1+g_{2009}) \tag{20B.13}$$

wat na substitutie volgende relatie geeft tussen het niveau van het bbp in 2009 en het niveau in 2007:

$$\begin{aligned} Q_{2009} &= Q_{2007}(1+g_{2008})(1+g_{2009}) \\ &= Q_{2007}(1+g_{2008}+g_{2009}+g_{2008}\cdot g_{2009}). \end{aligned} \tag{20B.14}$$

Het is de productterm van de twee groeivoeten in de laatste lijn van vergelijking (20B.14) die ervoor zorgt dat de gewone som van de twee groeivoeten niet exact de groei tussen 2007 en 2009 weergeeft, maar slechts bij benadering. Voor kleine groeipercentages en weinig periodes is de benadering nog tamelijk precies, maar hoe groter de groeivoeten en vooral hoe langer de periodes, hoe groter de afwijking wordt.

We kunnen dit inzicht veralgemenen om zo een gemiddelde jaarlijkse groeivoet af te leiden. Het niveau van het bbp in jaar *t* kan gerelateerd worden aan het niveau in een vertrekjaar 0 door vergelijking (20B.11) steeds één jaar achteruit te herschrijven tot we in het vertrekjaar zijn. Dat geeft:

$$\begin{aligned} Q_t &= Q_{t-1}(1+g_t) \\ &= Q_{t-2}(1+g_{t-1})(1+g_t) \\ &= Q_{t-3}(1+g_{t-2})(1+g_{t-1})(1+g_t) \\ &= \ldots \\ &= Q_0(1+g_1)\ldots(1+g_{t-2})(1+g_{t-1})(1+g_t). \end{aligned} \tag{20B.15}$$

Het product van de t factoren $1+g_i$ geeft de totale groei van Q_0 tot Q_t, en is analoog aan een berekening met een samengestelde intrestvoet. Als we nu een denkbeeldige groeivoet g invoeren die elk jaar dezelfde was, dan kunnen we de laatste lijn van vergelijking (20B.15) ook schrijven als:

$$Q_t = Q_0(1+g)^t. \tag{20B.16}$$

Deze denkbeeldige groeivoet g wordt de gemiddelde jaarlijkse groeivoet genoemd. Vergelijking (20B.16) toont dat die niet zomaar kan berekend worden als het rekenkundig gemiddelde van de verschillende groeivoeten. De gemiddelde groeivoet van een variabele die over *t* periodes groeit van Q_0 tot Q_t is wel gelijk aan:

$$g = \left(\frac{Q_t}{Q_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1. \tag{20B.17}$$

In het voorbeeld van tabel 20.3 is $t = 11$. De gemiddelde jaarlijkse groeivoet tussen 2007 en 2018 bedraagt dus

$$g = \left(\frac{Q_{2018}}{Q_{2007}}\right)^{\frac{1}{11}} - 1 = \left(\frac{82709{,}6}{62831{,}1}\right)^{\frac{1}{11}} - 1 = 0{,}025304\,, \tag{20B.18}$$

of 2,5304%. Als je de gemiddelde voet berekent vanuit de som van de groeivoeten (nl. 28% gedeeld door 11, is een gemiddelde van 2,5414%), dan bekom je een ander groeivoet. Het verschil is in dit voorbeeld klein, omdat de groeivoeten zelf tamelijk klein zijn, en we slechts 11 perioden bekijken. Over langere periodes en zeker met grotere groeipercentages kunnen de verschillen belangrijk worden.

Een andere toepassing van deze inzichten vinden we bij het omzetten van groei over kortere periodes, bijvoorbeeld een kwartaal (drie maanden) naar jaarlijkse groei. De groei in, bijvoorbeeld, het derde kwartaal van jaar t is gelijk aan:

$$g_{t,3} = \frac{Q_{t,3} - Q_{t,2}}{Q_{t,2}} \tag{20B.19}$$

waarbij we na de komma in het subscript het kwartaal aanduiden waarvoor het niveau van het bbp geldt. Door het feit dat deze periode slechts drie maanden beslaat, zal het groeicijfer natuurlijk veel lager zijn. Om het groeicijfer vergelijkbaar te maken met jaarlijkse groeicijfers, wordt het kwartaalcijfer daarom vaak uitgedrukt 'op jaarbasis'. Dan zijn er twee mogelijkheden. Ofwel berekent men de groei van het derde kwartaal op jaarbasis als:

$$(1 + g_{t,3})^4 - 1, \tag{20B.20}$$

waarbij men dus doet alsof de groei van het geobserveerde derde kwartaal zich een jaar lang zou voordoen. Om de redenen die we hierboven gaven is dat niet hetzelfde als de kwartaalgroei vermenigvuldigen met 4.

Ofwel berekent men in het derde kwartaal de groei ten opzichte van hetzelfde kwartaal een jaar eerder:

$$\frac{Q_{t,3} - Q_{t-1,3}}{Q_{t-1,3}}, \tag{20B.21}$$

wat natuurlijk onmiddellijk een jaarlijks groeicijfer geeft, maar gebaseerd op meer informatie dan enkel op de groei in het derde kwartaal van jaar t.

3 Bijdragen tot de groei van verschillende componenten in een som

Het bbp is een aggregaat van tienduizenden finale goederen en diensten, of de toegevoegde waarde van honderden sectoren. Vaak willen we een gedetailleerd inzicht in wat de groei van dergelijk aggregaat bepaalt. Dan is het handig de groei van het aggregaat te kunnen opsplitsen naar verschillende componenten. We tonen hoe de groei van een aggregaat kan ontbonden worden in de groei van de onderliggende componenten van dit aggregaat aan de hand van vergelijking (19.4) in hoofdstuk 19, waar het bbp voor jaar t geschreven werd als de som van vier bestedings-componenten:

$$Q_t = C_t + G_t + I_t + NX_t\,. \tag{20B.22}$$

Om de groei in grootheid Q_t te ontbinden, delen we de linker- en de rechterkant van vergelijking (20B.22) door het niveau in de voorgaande periode:

$$\frac{Q_t}{Q_{t-1}} = \frac{C_t}{Q_{t-1}} + \frac{G_t}{Q_{t-1}} + \frac{I_t}{Q_{t-1}} + \frac{NX_t}{Q_{t-1}}, \qquad (20B.23)$$

wat we aan de rechterkant herschrijven als:

$$\frac{Q_t}{Q_{t-1}} = \frac{C_t}{C_{t-1}}\frac{C_{t-1}}{Q_{t-1}} + \frac{G_t}{G_{t-1}}\frac{G_{t-1}}{Q_{t-1}} + \frac{I_t}{I_{t-1}}\frac{I_{t-1}}{Q_{t-1}} + \frac{NX_t}{NX_{t-1}}\frac{NX_{t-1}}{Q_{t-1}}. \qquad (20B.24)$$

De tweede factor in elke term aan de rechterkant van (20B.24) geeft het aandeel weer van deze bbp-component in het bbp van jaar $t-1$. We stellen dit aandeel voor door w^C voor consumptie, w^G voor overheidsbestedingen, w^I voor investeringen en w^{NX} voor netto-export. De eerste factor in elke term, en ook de linkerzijde van (20B.24) kan omgezet worden in een groeivoet van de betreffende grootheid door (20B.11) te gebruiken. We krijgen dan:

$$\begin{aligned} 1+g_t &= (1+g_t^C)\cdot w^C + (1+g_t^G)\cdot w^G + (1+g_t^I)\cdot w^I + (1+g_t^{NX})\cdot w^{NX} \\ &= g_t^C w^C + g_t^G w^G + g_t^I w^I + g_t^{NX} w^{NX} + (w^C + w^G + w^I + w^{NX}) \end{aligned}, \qquad (20B.25)$$

wat, aangezien de aandelen van de verschillende componenten sommeren tot één, kan geschreven worden als:

$$g_t = w^C g_t^C + w^G g_t^G + w^I g_t^I + w^{NX} g_t^{NX} \qquad (20B.26)$$

De groei van het bbp is de som van de groeivoeten van de verschillende componenten, maar dan wel gewogen met wegingsfactoren (hier voorgesteld door w^i). De wegingsfactoren geven het belang weer van de component van het aggregaat, en zijn het aandeel van de component in het aggregaat van het jaar voordien.

Veralgemenend kunnen we de groei van een aggregaat dat uit *n* componenten bestaat schrijven als:

$$g_t = \sum_{i=1}^{n} w^i g_t^i \,. \qquad (20B.27)$$

De groei van een som van termen is de gewogen som van de groei van de verschillende termen, waarbij de wegingsfactoren het aandeel van de termen zijn in het totaal van het vorig jaar. Een voorbeeld van toepassing van deze ontbinding vind je in figuur 25.10 in het handboek. De private consumptie, overheidsuitgaven, private investeringen en netto-export vormen samen de aggregatieve vraag, waar we in hoofdstuk 25 dieper op ingaan. De decompositie van de groei laat toe aan te duiden welk onderdeel van de aggregatieve vraag het meest heeft bijgedragen tot de spectaculaire vraaguitval in 2009.

De bijdrage van componenten aan de groei van een aggregaat op basis van vergelijking (20B.27) is ook elders toepasbaar. Zo kan de groei van het nationaal inkomen opgesplitst worden naar groei van de inkomenscomponenten (wedden en lonen, kapitaalinkomen, gemengd inkomen), of kunnen ook de bijdragen van verschillende sectoren berekend worden in de creatie van de toegevoegde waarde. Ook geografisch wordt een bbp-groei vaak opgesplitst: voor hoeveel procentpunt dragen bijvoorbeeld de verschillende regio's bij tot de Belgische groei, of de verschillende wereldregio's tot de groei van het wereld-bbp?

4 Een handige vuistregel

De vuistregel voor een verdubbeling van een grootheid kan worden afgeleid uit (20B.10). Een verdubbeling houdt in:

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = 2 \,, \tag{20B.28}$$

zodat uit (20B.10) volgt:

$$\begin{aligned} & e^{g \cdot t} = 2 \\ & \Rightarrow \ln(e^{g \cdot t}) = \ln 2 \,. \\ & \Rightarrow g \cdot t = \ln 2 \end{aligned} \tag{20B.29}$$

en dus is het aantal perioden dat nodig is om bij groeivoet g per periode, de grootheid te verdubbelen, gelijk aan:

$$t = \frac{\ln 2}{g} = \frac{0,693147}{g} \,. \tag{20B.30}$$

Wanneer de groeivoet wordt uitgedrukt in procent betekent het dat een deling van (ongeveer) 70 door de groeivoet het aantal perioden geeft nodig om een grootheid te verdubbelen. Dat is de vuistregel die we in vergelijking (20.23) hebben voorgesteld.