Oplossingen Hoofdstuk 4

Hieronder staan oplossingen van enkele vragen uit Hoofdstuk 4.

1.

(b)

- $\mathrm{Ker}(L_2) = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ en $\mathrm{Im}(L_2) = \mathbb{R}$. Dit is geen isomorfisme.
- $\mathrm{Ker}(L_5) = \mathrm{vct}\{(-2, 1, -3)\}$ en $\mathrm{Im}(L_5) = \mathbb{R}^2$. Dit is geen isoforfisme.
- $\mathrm{Ker}(L_7) = \{0\}$ en $\mathrm{Im}(L_7) = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dit is een isomorfisme.
- $\mathrm{Ker}(L_9) = \{Q \mid PQ = 0\} = \begin{cases} \{0\}, & P \neq 0; \\ \mathbb{R}[X], & P = 0 \end{cases}$ en

  $$\mathrm{Im}(L_9) = \{R \in \mathbb{R}[X] | \exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ waarvoor } R = PQ\}.$$

  Dit is enkel een isomorfisme als $P = a \in \mathbb{R}_0$. De dimensiestelling is niet van toepassing aangezien $\mathbb{R}[X]$ oneindigdimensionaal is.
- $\mathrm{Ker}(ev_a) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(a) = 0\}$ en $\mathrm{Im}(ev_a) = \mathbb{R}$. Dit is geen isomorfisme.

2.

- $\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{vct}\{(-2, -1, 1, -1, 0), (-3, 0, 0, 0, 1)\}$.
  Merk op dat deze schrijfwijze niet uniek is.
- $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{vct}\{(1, 2, 0, 2), (-2, -5, 5, 6), (0, -3, 15, 18)\}$.
  Opnieuw zijn er ook andere schrijfwijzen mogelijk.
- L is niet injectief en niet surjectief.

3.

- $(K \circ L)(x, y, z) = (x - y + z, -y, x + z)$.
- $(L \circ K)(x, y) = (2y, x + y)$.

5.

- $L_1(x, y) = (2y - 4x, -x)$.
- $L_2(a, b, c) = (a + 4b - 5c) - 7bX + (3a + 4c)X^2$.
- L_3 bepaalt geen unieke lineaire afbeelding.

6.

(a) $Id^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Id^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$

(b) $Id^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad Id^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) $Id^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad Id^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

7. $T^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & 18 \\ -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.

(a) $Id^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Id^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $T^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad T^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

11.

(a) $Id^{\varepsilon}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $(-1, 0, 3, -3, 1)$

(c) $L^{\tilde{\varepsilon}}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $L^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

12. (a) $L^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $L^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$ (c) $L^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Lineaire algebra – Tweede editie ISBN 9789462700529 © 2015 Universitaire Pers Leuven

13. (b) $L^{\beta_2}_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $L(-X^2+6X-3) = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

14.

(a) Een mogelijke basis van $\ker(L)$ is $\{(-3,-8,4)\}$ en een mogelijke basis van $\mathrm{Im}(L)$ is $\{(4,0),(3,1)\}$. Dus $\dim(\ker(L)) = 1$ en $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2$.

(b) $L(x,y,z) = (4x-y+z, y+2z)$ (coördinaten ten opzichte van de standaardbasis).

15.

(b) $L^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) L is niet injectief maar wel surjectief. De rang van L is gelijk aan 3.

16. L is surjectief als en slechts als a, b en c aan de volgende voorwaarden voldoen: $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ en $a+b+c \neq 0$.

17. Kies bijvoorbeeld $\alpha = \{(1,0),(-3,2)\}$ en $\beta = \{(2,4,6),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

18.

(a) Kies bijvoorbeeld $\alpha_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,-2,1,0),(2,-3,0,1)\}$ en $\beta_1 = \{(1,2,3),(3,3,3),(0,0,1)\}$.

(b) Kies bijvoorbeeld $\alpha_2 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,-1,1,0),(2,-2,0,1)\}$ en $\beta_2 = \{(1,2,3),(3,3,3),(0,0,1)\}$.

19. $\mathrm{vct}\{(-1,4,2),(1,0,-2)\}$, merk op dat deze schrijfwijze niet uniek is.

23. Als $x = -3$, is de rang van A gelijk aan 2; anders is ze gelijk aan 3.