Oplossingen Hoofdstuk 3

Hieronder staan oplossingen van enkele vragen uit Hoofdstuk 3.

7. $p(X) = -p_1(x) + 3p_2(x) - 2p_3(x)$.

14. De coördinaten van $4-3X+X^2$ zijn $(0,4,-3)$. De vector met coördinaten $(2,-3,1)$ is $-1+3X-2X^2$.

15.

- 2
- 3
- 3
- 3

16. $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

17. $\dim U = 2$, een mogelijke basis is $\alpha = \{(1,1,-1),(3,1,0)\}$. $(1,0,0) \notin U$, de coördinaten van $(-4,-10,13)$ ten opzichte van α zijn $(-13,3)$.

18. Twee mogelijke basissen zijn bijvoorbeeld $\{(1,3,-1),(3,-1,1)\}$ en $\{(1,3,-1),(3,4,-1)\}$.

19.

(a) Eén mogelijke oplossing is $\{(1,2,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$.

(b) Eén mogelijkheid is om de matrix $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ toe te voegen.

20. $k = -8$.

21. $(a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3)$

22.

(a) Dimensie 2; een mogelijke basis is $\{(0,1,1),(1,1,0)\}$.

(b) Dimensie 1; een mogelijke basis is $\{(1,-1,-1)\}$.

(c) Dimensie 2; een mogelijke basis is

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\right\}.$$

Lineaire algebra – Tweede editie ISBN 9789462700529 © 2015 Universitaire Pers Leuven

24.

A_1

- $R(A_1)$: een mogelijke basis is $\{(1,2,1,5),(0,0,1,2)\}$.
- $C(A_1)$: een mogelijke basis is $\{(1,2,1),(1,-3,-1)\}$.
- $N(A_1)$: een mogelijke basis is $\{(-2,1,0,0),(-3,0,-2,1)\}$.

A_2

- $R(A_2)$: een mogelijke basis is $\{(1,1,1),(0,0,1),(0,1,0)\}$.
- $C(A_2)$: een mogelijke basis is $\{(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1)\}$.
- $N(A_2)$: $\varnothing$.

A_3

- $R(A_3)$: een mogelijke basis is

$$\{(1,1,-1,3,1),(0,1,-1,-2,1),(0,0,-2,2,1),(0,0,0,0,1)\}.$$

- $C(A_3)$: een mogelijke basis is

$$\{(0,1,2,0,3),(1,1,1,0,5),(-1,-1,-1,-2,-5),(1,1,3,1,10)\}.$$

- $N(A_3)$: een mogelijke basis is $\{(-5,3,1,1,0)\}$.

25.

- V: een mogelijke basis is $\{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$.
- W: een mogelijke basis is $\{(1,-1,0,0),(0,0,2,1)\}$.
- $V+W$: een mogelijke basis is $\{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(1,-1,0,0)\}$.
- $V\cap W$: een mogelijke basis is $\{(3,-3,2,1)\}$.

26.

(a)

- $\dim(U+W)=3$.
- $\dim(U\cap W)=0$.
- De som is direct.

(b)

- $\dim(U+W)=3$.
- $\dim(U\cap W)=1$.
- De som is niet direct.

(c)

- $\dim(U+W)=3$.
- $\dim(U\cap W)=0$.
- De som is direct.

Lineaire algebra – Tweede editie ISBN 9789462700529 © 2015 Universitaire Pers Leuven

27.

De vectorruimte U is in beide gevallen niet uniek en de decompositie hangt af van de keuze van U.

(a)

- $U = \{(0, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- $v = \underbrace{(1, 2, -\frac{1}{2})}_{\in W} + \underbrace{(0, 0, \frac{11}{2})}_{\in U}$.
- $w = \underbrace{(1, -2, -5)}_{\in W} + \underbrace{(0, 0, 0)}_{\in U}$.

(b)

- $U = \{\lambda X^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- $p_1(X) = \underbrace{1 - 7X}_{\in W} + \underbrace{0}_{\in U}$.
- $p_2(X) = \underbrace{4 - 2X + 13X^2}_{\in W} + \underbrace{-7X^2}_{\in U}$.

30.

(d) (1,1)

35.

- $a = -1$: $\dim(U_a \cap V_a) = 1$, een mogelijke basis is $\{(3, 14, 0, -5)\}$.
- $a \neq -1$: $\dim(U_a \cap V_a) = 0$, de basis is $\emptyset$.