auteursrechtelijk beschermd materiaal

Oplossingen Hoofdstuk 1

Hieronder staan antwoorden voor enkele oefeningen uit Hoofdstuk 1.

1.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dit is telkens een mogelijke oplossing. Deze oefening kent geen unieke oplossing.

2.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deze matrix is zowel in rijgereduceerde vorm als in echelonvorm, maar er zijn ook andere echelonvormen mogelijk.

4.

(a) $\{(-1-4\lambda, 6-2\lambda, 2-3\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

(b) $\varnothing$

5.

(a) $\{(0,0,0)\}$

(b) $\{(-10\lambda, 13\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

(c) $\left\{(-\frac{1}{7}\lambda, \frac{11}{7}\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

(d) $\{(0, 2\mu, \mu, -3\lambda, \lambda) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

6.

(a) $\{(4, -3, 2)\}$

(b) $\{(1-10k, 1+13k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

(c) $\varnothing$

(d) $\{(1, 2z, z, -3u, u) \mid z, u \in \mathbb{R}\}$

7.

$$\{(\frac{10}{23}, \frac{5}{6}, \frac{5}{2})\}$$

Lineaire algebra - Tweede editie ISBN 9789462700529 © 2015 Universitaire Pers Leuven

auteursrechtelijk beschermd materiaal

8.

(a) $\left\{\left(\frac{2}{5} - \frac{7}{10}i, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{-3-6i}{10}\right)\right\}$ (b) $\{(-\frac{k}{2} - ik, -\frac{k}{4} + \frac{ik}{4}, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

9.

(a) Het stelsel heeft geen oplossingen als $-b_1 + 2b_2 - 5b_3 \neq 0$.
(b) Het stelsel is oplosbaar als $-b_1 + 2b_2 - 5b_3 = 0$.

10.

(a) Het eerste stelsel heeft geen oplossingen als $h = \frac{3}{2}$ en $k \neq 2$. Het tweede stelsel heeft geen oplossingen als $h = -\frac{k}{2}$.
(b) Het eerste stelsel heeft een unieke oplossing als $h \neq \frac{3}{2}$. Het tweede stelsel heeft een unieke oplossing als $h \neq -\frac{k}{2}$.
(c) Het eerste stelsel heeft meerdere oplossingen als $h = \frac{3}{2}$ en $k = 2$. Het tweede stelsel heeft nooit meerdere oplossingen.

11.

(a)

- $k = -2$: strijdig stelsel
- $k = 1$: oneindig veel oplossingen met twee vrije variabelen
- $k \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$: unieke oplossing

(b)

- $k = -1$: strijdig stelsel
- $k = 1$: oneindig veel oplossingen met één vrije variabele
- $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$: unieke oplossing

(c)

- $k = 0$: strijdig stelsel
- $k = -1$: oneindig veel oplossingen met één vrije variabele
- $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$: unieke oplossing

12.

- $a \in \{-2, 2\}$ en $b = 1$: oneindig veel oplossingen met één vrije variabele
- $a \in \{-2, 2\}$ en $b \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$: strijdig stelsel
- $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$: unieke oplossing

Lineaire algebra - Tweede editie ISBN 9789462700529 © 2015 Universitaire Pers Leuven

auteursrechtelijk beschermd materiaal

13.

- $1 - ac = 0$ en $d - cb \neq 0$: evenwijdige rechten
- $1 - ac = 0$ en $d - cb = 0$: samenvallende rechten
- $1 - ac \neq 0$: snijdende rechten

14.

- $b = 0$: oneindig veel oplossingen met één vrije variabele
- $b \in \{1, 2\}$: strijdig stelsel
- $b \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, 2\}$: unieke oplossing

15.

- $(a, b) = (1, 1)$: oneindig veel oplossingen met twee vrije variabelen
- $(a, b) = (-2, -2)$: oneindig veel oplossingen met één vrije variabele
- $a \notin \{-2, 1\}$ en $b \neq 0$: unieke oplossing
- $b = 0$ of $(a = -2$ en $b \neq -2)$ of $(a = 1$ en $b \neq 1)$: strijdig stelsel

16.

Laurens moet een premie van 22.000 betalen.

17.

(a) 10.000 euro in fonds A, 3000 euro in fonds B, 2000 euro in fonds C.
(b) 8500 euro in fonds A, 2000 euro in fonds C.

18.

- $(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$
- $C(AB) = 0$

19.

- $(2A - B)C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
- $CC^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 9 & 17 & -6 \\ -1 & -6 & 9 \end{pmatrix}$. Dit is een symmetrische matrix.

Lineaire algebra - Tweede editie ISBN 9789462700529 © 2015 Universitaire Pers Leuven

auteursrechtelijk beschermd materiaal

20.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

21.

(e) $$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

22.

$$f(A) = \begin{pmatrix} -109 & 96 & 0 \\ -144 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 393 \end{pmatrix}$$

23.

(a) $$B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

(b) $$C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -12 & 8 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

24.

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & 1 & \frac{6}{7} \\ -\frac{1}{7} & 1 & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & -1 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

De inverse van A_4 bestaat niet.

25.

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad B_3^{-1} = B_3$$

26.

A heeft een inverse $A^{-1} = A$ als en slechts als $a = 0$ en $bc = 1$.

27.

(a) $$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 17 \\ x_3 = 20 \end{cases}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Lineaire algebra - Tweede editie ISBN 9789462700529 © 2015 Universitaire Pers Leuven

auteursrechtelijk beschermd materiaal

(b) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$, $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -16 & 10 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

32.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

33.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

36.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

37.

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

38.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lineaire algebra - Tweede editie ISBN 9789462700529 © 2015 Universitaire Pers Leuven